

Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. ERDÖS in Budapest.

Für den zuerst von TSCHEBYSCHEF bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von RAMANUJAN¹⁾ bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr LANDAU einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q -fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecke des Herrn LANDAU kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem LANDAUSCHEN Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten TSCHEBYSCHEFschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachheit nicht hinter dem RAMANUJANSCHEN Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

1. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

¹⁾ SR. RAMANUJAN, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11 (1919), S. 181—182 = *Collected Papers of SRINIVASA RAMANUJAN* (Cambridge, 1927), S. 208—209.

ist durch die Primzahlen p mit $a < p \leq 2a$ teilbar, da dieselben den Zähler teilen, den Nenner aber nicht; also ist

$$\prod_{a < p \leq 2a} p \leq \binom{2a}{a}.$$

Nun ist aber für $a \geq 5$

$$\binom{2a}{a} < 4^{a-1};$$

in der Tat gilt diese Ungleichung für $a=5$ und, falls dieselbe für ein gewisses a erfüllt ist, so gilt wegen

$$\binom{2(a+1)}{a+1} = \frac{(2a)!(2a+1)(2a+2)}{(a!)^2(a+1)^2} < 4 \binom{2a}{a}$$

das gleiche auch für $a+1$. Daher ist

$$(1) \quad \prod_{a < p \leq 2a} p < 2^{2(a-1)}.$$

2. Es sei $b \geq 10$; bezeichnen wir allgemein die kleinste ganze Zahl $\geq \xi$ mit $\{\xi\}$ und es sei

$$a_1 = \left\{ \frac{b}{2} \right\}, \quad a_2 = \left\{ \frac{b}{2^2} \right\}, \quad \dots, \quad a_k = \left\{ \frac{b}{2^k} \right\}, \quad \dots$$

Dann ist $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq \dots$; ferner

$$a_k < \frac{b}{2^k} + 1 = 2 \frac{b}{2^{k+1}} + 1 \leq 2a_{k+1} + 1$$

also, da a_k und $2a_{k+1}$ ganze Zahlen sind,

$$(2) \quad a_k \leq 2a_{k+1}.$$

Es sei m die größte Zahl, für welche $a_m \geq 5$ ist; dann ist $a_{m+1} < 5$, also wegen (2) $a_m < 10$. Ferner ist $2a_1 \geq b$; daher überdecken wegen (2) die Intervalle

$$a_m < \eta \leq 2a_m, \quad a_{m-1} < \eta \leq 2a_{m-1}, \quad \dots, \quad a_1 < \eta \leq 2a_1$$

lückenlos das Intervall $10 < \eta \leq b$.

Wir wenden nun die Ungleichung (1) der Reihe nach für $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ an. Durch Multiplikation erhalten wir

$$\prod_{a_1 < p \leq 2a_1} p \prod_{a_2 < p \leq 2a_2} p \dots \prod_{a_m < p \leq 2a_m} p < 2^{2(a_1-1+a_2-1+\dots+a_m-1)} < 2^{2\left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2^2} + \dots + \frac{b}{2^m}\right)} < 2^{2b},$$

also, nach den oben gesagten, a fortiori

$$(3) \quad \prod_{10 < p \leq b} p < 2^{2b}.$$

3. Nach einem bekannten Satz von LEGENDRE²⁾ enthält $n!$ den Primfaktor p mit der Multiplizität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

wobei, wie üblich, $\lfloor \xi \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq \xi$ bezeichnet. Daher wird p in

$$(4) \quad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

mit der Multiplizität

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

als Primfaktor enthalten. Hierbei ist jedes Glied ≤ 1 ; in der Tat ist die ganze Zahl

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2 \left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2.$$

Nun verschwinden aber in (5) die Glieder mit $p^k > 2n$; daher kann die Multiplizität (5) nicht größer sein, als die größte ganze Zahl r mit $p^r \leq 2n$. D. h. ist die Potenz der Primzahl p , mit der sie in der Primfaktorenzerlegung von $\binom{2n}{n}$ figuriert, $\leq 2n$. Hieraus folgt auch, daß die Primzahlen $p > \sqrt{2n}$ in der Primfaktorenzerlegung von $\binom{2n}{n}$ höchstens auf der ersten Potenz vorkommen.

Wir bemerken nun — und dies ist der springende Punkt des vorliegenden Beweises — daß für $n \geq 3$ die Primzahlen mit $\frac{2}{3}n < p \leq n$ den Binomialkoeffizient (4) nicht teilen. In der Tat sind dann wegen $3p > 2n$ nur die beiden Faktoren p , $2p$ des Zählers von (4) durch p (und zwar wegen $p > 2$ nur durch die erste Potenz desselben) teilbar; und der Nenner ist auch teilbar durch p^2 .

Diese Überlegungen ergeben für $n \geq 3$ die Ungleichung

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} (2n) \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leq 2n} p$$

²⁾ A. M. LEGENDRE, *Zahlentheorie* (Übersetzung von H. MASER; Leipzig, 1886), Bd. 1, S. 11; oder E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909), Bd. 1, S. 75–76.

also, da das erste Produkt rechts höchstens $\sqrt{2n}$ Faktoren besitzt und da allgemein

$$2n \cdot \binom{2n}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-2}{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n}{n} > 2^{2n}$$

gilt, die Ungleichung

$$(6) \quad 2^{2^n} < (2n)^{1 + \sqrt{2n}} \quad // \quad p \quad // \quad p.$$

$$\sqrt{2n} < p < \frac{2}{3}n \quad n < p \leq 2n$$

4. Es sei nun $n \geq 50$ und setzen wir voraus, daß es zwischen n und $2n$ keine Primzahl gibt. Dann ist das zweite Produkt in (6) leer; für den ersten gilt wegen $\sqrt{2n} \geq 10$ und (3)

$$// \quad p \leq // \quad p < 2^{2 \left[\frac{2}{3}n \right]} \leq 2^{\frac{4}{3}n};$$

$$\sqrt{2n} < p < \frac{2}{3}n \quad 10 < p < \frac{2}{3}n$$

also geht (6) in

$$(7) \quad 2^{2^n} < (2n)^{1 + \sqrt{2n}} 2^{\frac{4}{3}n}$$

über, was für hinreichend große n unmöglich ist.

Um eine nicht allzu hohe Schranke zu gewinnen, von welcher ab (7), d. h.

$$(8) \quad 2^{\frac{2}{3}n} < (2n)^{1 + \sqrt{2n}}$$

nicht mehr gültig ist, schätzen wir wie folgt ab. Wegen der Ungleichung $a \leq 2^{a-1}$ (was man etwa durch vollständige Induktion leicht zeigen kann) ist

$$2n = \left(\left\lceil \sqrt[6]{2n} \right\rceil \right)^6 < \left(\left\lceil \sqrt[6]{2n} \right\rceil + 1 \right)^6 \leq 2^{6 \left\lceil \sqrt[6]{2n} \right\rceil} \leq 2^{6 \sqrt[6]{2n}}$$

also folgt aus (8) (falls immer $n \geq 50$ vorausgesetzt wird)

$$2^{2^n} < 2^{\frac{6}{2n} (18 + 18 \sqrt{2n})} < 2^{\frac{6}{2n} \cdot 20 \sqrt{2n}} = 2^{20 \sqrt{2n}},$$

$$\text{d. h. } (2n)^{\frac{1}{3}} < 20, \quad n < \frac{1}{2} \cdot 20^3 = 4000.$$

Daher gibt es für $n \geq 4000$ wenigstens eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.

5. Um hiervon zu dem TSCHEBYSCHESCHEN Satz: für $n \geq 1$ gibt es wenigstens eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ zu gelangen,

braucht man nach einer Bemerkung des Herrn LANDAU³⁾ nicht für $n=1, 2, \dots, 3999$ je eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ aufzuweisen. Es genügt zu bemerken, daß von den Primzahlen

$$(9) \quad 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

jede größer als die vorangehende und kleiner als die doppelte derselben ist, und daß die letzte 4000 übertrifft. In der Tat, ist $1 \leq n < 4000$ und ist p das erste Glied $> n$ der Folge (9), so ist, falls p' das vorangehende Glied (und im Falle $p=2$ die Zahl 1) bezeichnet,

$$n < p \leq 2p' \leq 2n.$$

6. Mit Hilfe der Ungleichung (6) gelangt man auch leicht zu einer *unteren Abschätzung* der Anzahl der Primzahlen zwischen n und $2n$. In der Tat ergibt sich aus (6) und (3) durch eine der obigen analoge Überlegung für $n \geq 4000$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad p > 2^{2n - \frac{4}{3}n} (2n)^{-(1 + \sqrt[6]{2n})} &> 2^{\frac{1}{3}} (2n - \sqrt[6]{2n} (18 + 18 \sqrt[6]{2n})) > \\ > 2^{\frac{1}{3}} (2n - 19(2n)^{\frac{2}{3}}) = 2^{\frac{2}{3}} n (1 - 19(2n)^{-\frac{1}{3}}) > \\ &\geq 2^{\frac{2}{3}} n (1 - \frac{19}{20}) = 2^{\frac{1}{30}} n, \end{aligned}$$

also, da jeder Faktor des Produktes $\leq 2n$ ist, so ist die Anzahl der Faktoren desselben (in der üblicher Bezeichnung)

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{\log 2}{30} \frac{n}{\log 2n},$$

also

$$(10) \quad \pi(2n) - \pi(n) > \alpha \frac{n}{\log n}$$

für eine geeignete positive Zahl α .

Nach dem TSCHEBYSCHESCHEN Satz gilt daher (10) auch für $2 \leq n < 4000$, sofern α hinreichend klein gewählt wurde.

(Eingegangen am 24. November 1931.)

³⁾ E. LANDAU, I. c., Bd. 1, S. 92.